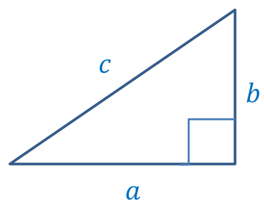
三平方の定理

直角三角形の直角をはさむ 2 辺の長さ a と b および斜辺の長さ c について

$$a^2+b^2=c^2$$

が成り立ちます。



証明の仕方は多数存在するが，今回は正方形の面積を 2 通りの方法で求めて，その 2 つが同じになることから a, b と c の関係性を用いて示していきます。

（証明）

右の図のように，∠C＝90°，AB＝ c, BC＝ a，CA＝ b の直角三角形 ABC の斜辺 AB を 1 辺とする正方形 DEBA をつくり，そのまわりに直角三角形 ABC と合同な直角三角形をつくると，正方形 QRCP ができる。

正方形 DEBA の 1 辺の長さは c なので，面積は c^2 である。

正方形 QRCP の 1 辺の長さは $a+b$ なので，面積は $(a+b)^2$ である。

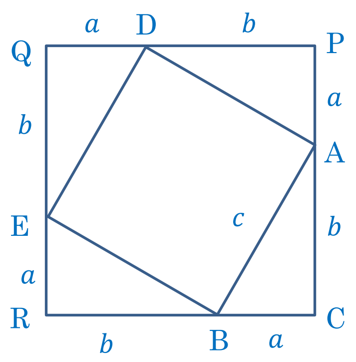
また，正方形 DEBA の面積は，正方形 QRCP の面積から 4 つの合同な直角三角形を引くことによって求めることができるから，

$$c^2=(a+b)^2-4\times\frac{1}{2}\times a\times b$$

$$c^2=a^2+2ab+b^2-2ab$$

$$c^2=a^2+b^2$$

よって，$a^2+b^2=c^2$（証明終了）



三平方の定理の逆

直角三角形であれば，3 辺の長さについて $a^2+b^2=c^2$ が成り立つことを学習しましたが，その逆である，三角形の 3 辺の長さについて $a^2+b^2=c^2$ という関係が成立しているならば，その三角形は直角三角形であることがいえます。

三角形の呼び方

三角形は次の 3 つに大別されます。

3 つの角がすべて 90°より小さい三角形を鋭角三角形といいます。

90°の角がある三角形を直角三角形といいます。

90°より大きい角がある三角形を鈍角三角形といいます。

三角形の 3 辺の長さ a, b, c（$a \leqq b \leqq c$）において,

$a^2 + b^2 > c^2$ ならば鋭角三角形, $a^2 + b^2 < c^2$ ならば鈍角三角形です。

例　3 辺の長さが次のような三角形は鋭角三角形, 直角三角形, 鈍角三角形のいずれかに当てはまるか答えなさい。

3cm, 4cm, 6cm のとき

$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$, $6^2 = 36$より, $3^2 + 4^2 < 6^2$であるから鈍角三角形です。

5cm, 12cm, 13cm のとき

$5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$, $13^2 = 169$より, $5^2 + 12^2 = 13^2$ であるから直角三角形です。

特別な三角形の辺の比・・・いわゆる三角定規の角度をもつ三角形の比

45°, 45°, 90°の角をもつ直角二等辺三角形の 3 つの対辺の長さの比

$1 : 1 : \sqrt{2}$

30°, 60°, 90°の角をもつ直角二等辺三角形の 3 つの対辺の長さの比

$1 : \sqrt{3} : 2$

三平方の定理と平面図形

三平方の定理を使うことで, 高さが示されていなかった図形の面積を求めることができるようになります。